



TITLE:

On a bijective proof of a factorization formula for Macdonald polynomials at roots of unity (Expansion of Combinatorial Representation Theory)

AUTHOR(S):

沼田, 泰英

CITATION:

沼田, 泰英. On a bijective proof of a factorization formula for Macdonald polynomials at roots of unity (Expansion of Combinatorial Representation Theory). 数理解析研究所講究録 2009, 1647: 69-80

ISSUE DATE:

2009-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140701>

RIGHT:

On a bijective proof of a factorization formula for Macdonald polynomials at roots of unity

沼田 泰英 (稚内北星学園大学 情報メディア学部)

概要

Haiman, Haglund, Loehr によって与えられた Modified Macdonald polynomials $\tilde{H}_\mu(X; q, t)$ の組合せ論的な記述を用い, factorization formula と呼ばれる公式に組合せ論的な証明を, μ が特殊な場合に, 与えることができたので, その概略について解説する. なお, この結果は François Descouens 氏と森田英章氏との共同研究に基づくものである.

1 Introduction

Macdonald [4] によって導入された Macdonald polynomial は Hall-Littlewood functions の一般化であるが, ここでは, Macdonald polynomial を変形することで得られる, modified Macdonald polynomial $\tilde{H}_\mu(X; q, t)$ について扱う. Haglund, Haiman, Loehr は [3] で, $\tilde{H}_\mu(X; q, t)$ を monomial basis で展開したときの係数の組合せ論的な表示 (Theorem 2.6) を与えた. これにより $\tilde{H}_\mu(X; q, t)$ は, Young diagram μ 上の filling T に対して定義される, $\text{inv}(T)$, $\text{maj}(T)$ という量に関する, 重み付きの母関数として記述できる.

一方, Descouens と Morita は, [1] で, t が 1 の冪根であるときの特殊値に関する factorization formula と呼ばれる公式を代数的に示している. もう少し言うと, $\mu = (\nu, n^l, \kappa)$ という形をした Young diagram μ と, 1 の原始 l 乗根に対して,

$$\tilde{H}_\mu(X; q, \zeta_l) = \tilde{H}_{(\nu, \kappa)}(X; q, \zeta_l) \cdot \tilde{H}_{(n^l)}(X; q, \zeta_l)$$

という等式が成立している. Haglund-Haiman-Loehr の式を使い, この等式を組合せ論的に証明することが我々の目標である. 我々は $\kappa = \emptyset$ かつ $n = 1, 2$ の場合という場合, すな

わち, $\mu = (\nu, n^l)$ に対する

$$\tilde{H}_\mu(X; q, \zeta_l) = \tilde{H}_\nu(X; q, \zeta_l) \cdot \tilde{H}_{(n^l)}(X; q, \zeta_l) \quad (1)$$

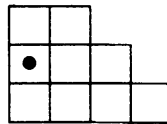
という等式に, 組合せ論的な証明を与えることができた [2] ので, 本稿ではその概略について述べる. なお, 詳しい証明などは [2] を参照されたい.

2 Modified Macdonald polynomials の組合せ論的表示

記号は特に断りがない限り [5] に従う. ここでは [3] で導入された modified Macdonald polynomials の組合せ論的な表示について述べる.

非負整数の非増加列 $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq 0)$ を partition とよび Young diagram $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq j \leq \mu_i\}$ と同一視する. ここでは Young diagram を French notation を使って Example 2.1 のように書きあらわす. Young diagram μ の cell $c = (i, j)$ に対して, c と同じ行で c よりも右側にある cell の数 $|\{(i, k) \in \lambda \mid k > j\}| = \lambda_i - j$ を $\text{arm}(c)$ で表す. また, c と同じ列で c よりも上にある cell の数 $|\{(k, j) \in \lambda \mid k > i\}|$ を $\text{leg}(c)$ で表す.

Example 2.1 $(4, 3, 2) \vdash 9$ は次の Young diagram で表す:



● の書いてある cell $c = (2, 1)$ に対し, $\text{arm}(c) = 2$, $\text{leg}(c) = 1$ である.

写像 $T: \mu \ni (i, j) \mapsto T_{i,j} \in \mathbb{Z}_{>0}$ を μ 上の filling と呼び, Young diagram μ の各 cell (i, j) に $T_{i,j}$ を書き入れた図形で T を表示する. また, μ 上の filling T に対し, $w_k = |\{(i, j) \in \mu \mid T_{i,j} = k\}|$ で定義される非負整数列 $w = (w_1, w_2, \dots)$ を T の weight と呼ぶ. Weight が w である μ 上の Filling T と変数 $X = (X_1, X_2, \dots)$ に対し, $X^T = x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots = \prod_{(i,j) \in \mu} X_{T_{i,j}}$ と定義する. また Young diagram μ と非負整数の列 w に対し, $\mathcal{F}_\mu, \mathcal{F}_\mu(w)$ を, 次で定義する:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mu &= \{ T \mid \mu \text{ 上の filling } \} \\ \mathcal{F}_\mu(w) &= \{ T \mid \mu \text{ 上の filling で weight が } w \text{ のもの } \}. \end{aligned}$$

Young diagram μ 上の Filling T と正の整数 i に対し,

$$\text{Des}_i(T) = \{ (i, j) \in \mu \mid T_{i-1,j} < T_{i,j} \}$$

と定義する (特に $i = 1$ のとき $\text{Des}_1(T) = \emptyset$). Des を用いて, maj_i , maj を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\text{maj}_i(T) &= \sum_{c \in \text{Des}_i(T)} (1 + \text{leg}(c)), \\ \text{maj}(T) &= \sum_i \text{maj}_i(T).\end{aligned}$$

また, $\text{arm}_i(T)$ を

$$\text{arm}_i(T) = \sum_{c \in \text{Des}_i(T)} \text{arm}(c)$$

と定義しておく.

Example 2.2 次は $(4, 3, 2)$ 上の weight $(1, 2, 1, 3, 0, 1, 0, 1)$ の filling である:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 2 & & \\ \hline 2 & 7 & 8 & \\ \hline 4 & 4 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

この T に対し, $\text{Des}_3(T) = \{ (3, 1) \}$, $\text{Des}_2(T) = \{ (2, 2), (2, 3) \}$ であるので $\text{maj}_3(T) = 1$, $\text{maj}_2(T) = 2 + 1$. したがって, $\text{maj}(T) = 4$.

Example 2.3 $(2, 2, 2, 1)$ 上の filling

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 4 & 7 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline \end{array}$$

において, $\text{Des}_3(T) = \{ (3, 1), (3, 2) \}$ であり, $\text{Des}_2(T) = \text{Des}_4(T) = \emptyset$ である. したがって, 次を得る:

$$\begin{aligned}\text{arm}_3(T) &= 1 + 0 = 1, & \text{arm}_2(T) &= \text{arm}_4(T) = 0, \\ \text{maj}_3(T) &= 2 + 1 = 3, & \text{maj}_2(T) &= \text{maj}_4(T) = 0.\end{aligned}$$

Young diagram μ と正の整数 i に対して,

$$\begin{aligned}\text{Att}'_i(\mu) &= \{ ((i, j), (i, j')) \mid 1 \leq j < j' \leq \mu_i \}, \\ \text{Att}''_i(\mu) &= \{ ((i, j), (i-1, j')) \mid 1 \leq j' < j \leq \mu_i \}.\end{aligned}$$

とおく.

Remark 2.4 $\text{Att}'_i(\mu)$ は μ の i 行目にある 2 つの cell を左から並べたものであり, 次のような位置関係にある cell 達である:

b		c	

また $\text{Att}''_i(\mu)$ は i 行目の cell と $i-1$ 行目の cell の pair で i 行目の cell の方が右にあるようなものを集めたものであり, 次のような位置関係にある cell 達である:

		b	
c			

また, μ 上の filling T に対して,

$$\begin{aligned}\text{Inv}'_i(T) &= \{ (b, c) \in \text{Att}'_i(\mu) \mid T_b > T_c \}, \\ \text{Inv}''_i(T) &= \{ (b, c) \in \text{Att}''_i(\mu) \mid T_b > T_c \}\end{aligned}$$

と定義する. さらに,

$$\begin{aligned}\text{inv}'_i(T) &= |\text{Inv}'_i(T)| \\ \text{inv}''_i(T) &= |\text{Inv}''_i(T)|\end{aligned}$$

とおき

$$\begin{aligned}\text{inv}_i(T) &= \text{inv}'_i(T) + \text{inv}''_i(T) - \text{arm}_i(T) \\ \text{inv}(T) &= \sum_i \text{inv}_i(T).\end{aligned}$$

と定義する.

Example 2.5 Example 2.3 の T に対し,

$$\begin{aligned}\text{Inv}'_2(T) &= \{ ((2, 1), (2, 2)) \}, & \text{Inv}'_1(T) &= \text{Inv}'_3(T) = \text{Inv}'_4(T) = \emptyset, \\ \text{Inv}''_3(T) &= \{ ((2, 1), (3, 2)) \}, & \text{Inv}''_2(T) &= \text{Inv}''_4(T) = \emptyset\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}\text{inv}_2(T) &= 1 + 0 - 0 = 1, \\ \text{inv}_3(T) &= 0 + 1 - 1 = 0, \\ \text{inv}_4(T) &= 0 + 0 - 0 = 0.\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}\text{maj}(T) &= 0 + 3 + 0 = 3 \\ \text{inv}(T) &= 0 + (1 + 0 + 0) = 1.\end{aligned}$$

以上のような定義の下, modified Macdonald polynomial は次の表示をもつ:

Theorem 2.6 ([3]) Young diagram $\mu \vdash m$ に対し, modified Macdonald polynomial $\tilde{H}_\mu(x; q, t)$ は次のような μ 上の filling 上の重みつき母関数としての表示をもつ:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_\mu(X; q, t) &= \sum_{T \in \mathcal{F}_\mu} q^{\text{inv}(T)} t^{\text{maj}(T)} X^T \\ &= \sum_w \sum_{T \in \mathcal{F}_\mu(w)} q^{\text{inv}(T)} t^{\text{maj}(T)} X_1^{w_1} X_2^{w_2} \dots,\end{aligned}$$

ただし, $w = (w_1, w_2, \dots)$ は $\sum_i w_i = m$ を満たす非負整数列を動く.

この表示を用いると, (1) は母関数間の等式となり次のような 1 対 1 対応の存在へと言い替えることができるが, この 1 対 1 対応を具体的に構成するというのが我々の問題意識である.

Theorem 2.7 For each w , there exists a bijection

$$\varphi: \bigcup_{w' + w'' = w} \mathcal{F}_\nu(w') \times \mathcal{F}_{(r^l)}(w'') \rightarrow \mathcal{F}_\mu(w)$$

such that

$$\begin{aligned}\text{maj}(\varphi(T_1, T_2)) &\equiv \text{maj}(T_1) + \text{maj}(T_2) \pmod{l}, \\ \text{inv}(\varphi(T_1, T_2)) &= \text{inv}(T_1) + \text{inv}(T_2),\end{aligned}$$

for all $(T_1, T_2) \in \bigcup_{w' + w'' = w} \mathcal{F}_\nu(w') \times \mathcal{F}_{(r^l)}(w'')$, where $\mu = \nu \amalg (r^l)$.

3 Young diagrams with tails

ν を $l(\nu) = k$ かつ $\nu_k \geq r$ を満たす Young diagram とする, すなわち $\nu_{k+1} = 0$ とする. $\mu = (\nu_1, \dots, \nu_k, r, \dots, r) = \nu \amalg (r^l)$ となっている場合を考える. 我々は $r = 1$ または 2 の場合に Theorem 2.7 の全単射を具体的に構成することができた. この節では一般の r に対して成立する事実に述べる.

$\pi: \nu \amalg (r^l) \rightarrow \mu$ を自然な全単射すなわち

$$\pi(c) = \begin{cases} (i, j) & \text{if } c = (i, j) \in \nu \\ (i+k, j) & \text{if } c = (i, j) \in (r^l) \end{cases}$$

で定義される写像とする. μ 上の filling T に対し, $T \circ \pi: \nu \amalg (r^l) \rightarrow \mathbb{Z}$ は, ν 上の filling $T' = (T \circ \pi)|_{\nu}$ と (r^l) 上の filling $T'' = (T \circ \pi)|_{(r^l)}$ の pair と同一視できる, ただしここで $T|_{\kappa}$ は T の κ への制限を表す. すなわち, π は,

$$\pi^*: \mathcal{F}_{\mu} \ni T \mapsto ((T \circ \pi)|_{\nu}, (T \circ \pi)|_{(r^l)}) \in \mathcal{F}_{\nu} \times \mathcal{F}_{(r^l)}$$

という全単射を誘導するが, π と T を合成することで weight が変わらないことに注意すると,

$$\pi^*: \mathcal{F}_{\mu}(w) \rightarrow \bigcup_{w=w'+w''} \mathcal{F}_{\nu}(w') \times \mathcal{F}_{(r^l)}(w'')$$

は全単射となっていることがわかる.

T を $\mu = \nu \amalg (r^l)$ 上の filling とし. $\pi^*(T) = (T_1, T_2) \in \mathcal{F}_{\nu} \times \mathcal{F}_{(r^l)}$ とする. $l(\nu) = k$ であることに着目すると, T の k 行目までは T_1 に移り, T の $k+1$ 行目以降は T_2 に移ることがわかる. この事実注意到すると, i 行目の情報のみから決まる $\text{Inv}'_i T$ には, $\pi^*(T)$ に対応するものがある. すなわち, 任意の i に対し, π^* で保存されることがわかる. また同様に, i 行目と $i-1$ 行目の情報から決まる $\text{Des}_i(T)$, $\text{Inv}''_i(T)$ は, $i \neq k$ に対し, π^* で保存されることがわかる. 一方, $\text{Des}_k(T)$, $\text{Inv}''_k(T)$ には, $\pi^*(T)$ に対応するものがないため, π^* で保存されない. 以上の事実をまとめると,

$$\text{inv}(T) = \text{inv}(T_1) + \text{inv}(T_2) + \text{inv}''_{k+1}(T) - \text{arm}_{k+1}(T), \quad (2)$$

$$\text{maj}(T) = \text{maj}(T_1) + \text{maj}(T_2) + \text{maj}_{k+1}(T) \quad (3)$$

を得る. 今 $\mu = \nu \amalg (r^l)$ 上の filling を考えているので, $\text{maj}_{k+1}(T) = l \cdot |\text{Des}_{k+1}(T)|$ であるから, (3) より

$$\text{maj}(T) \equiv \text{maj}(T_1) + \text{maj}(T_2) \pmod{l} \quad (4)$$

となる.

4 $r = 1$ の場合

ここでは, $r = 1$ の場合, すなわち $\mu = \nu \amalg (1^l)$ のときを考える. 特に $\nu = (h)$ とすることで, $\text{hook}(h, 1^l)$ の場合が含まれる.

T を $\mu = \nu \amalg (1^l)$ 上の filling とすると, $i > k$ に対し $\text{Att}_i''(\mu) = \emptyset$ であるので $\text{Inv}_i''(T) = \emptyset$ となる. 特に, $\text{Inv}_{k+1}''(T) = \emptyset$ であるので, $\text{inv}_{k+1}''(T) = 0$ である.

また, μ の $k+1$ 行目には $b = (k+1, 1)$ しか cell はないので $\text{Des}_{k+1}(T) \subset \{b\}$ である. $\text{arm}(b) = 0$ であることに着目すると, $\text{arm}_i(T) = 0$ がわかる.

従って (2) と (4) より次の定理を得る.

Theorem 4.1 Let ν be a partition (ν_1, \dots, ν_k) with $\nu_k \geq 1$. For $\mu = \nu \amalg (1^l)$, let $\pi: \nu \amalg (1^l) \rightarrow \mu$ and $\pi^*: \mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{F}_\nu \times \mathcal{F}_{(1^l)}$ be as above. Then $\varphi = (\pi^*)^{-1}$ satisfies the condition of Theorem 2.7.

Example 4.2 $l = 3$, $\mu = (2, 2, 1, 1, 1)$ の場合を考える. このとき次が成り立っている:

$$\begin{aligned} \text{maj} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) &= 1 + 3 + 4 + 1 = 9, \\ \text{maj} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) + \text{maj} \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right) &= (1 + 1) + 1 = 3 \\ &\equiv 9 \pmod{3}, \\ \text{inv} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) &= 1 - 1 = 0, \\ \text{inv} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) + \text{inv} \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right) &= (1 - 1) + 0 = 0. \end{aligned}$$

5 $r = 2$ の場合

次に, $r = 2$ の場合すなわち $\mu = \nu \amalg (2^l)$ のときを考える. この場合, $(\pi^*)^{-1}$ は Theorem 2.7 の条件を満たさない. そこで, 我々は $\tau: \mathcal{F}_\mu(w) \rightarrow \mathcal{F}_\mu(w)$ という全単射をうまく構成し $\varphi = (\pi^* \circ \tau)^{-1}$ が Theorem 2.7 の条件を満たすようにする. まず τ を定義するために必要となる言葉を用意する.

Definition 5.1 (condition xAx) 次の不等式のいずれかを満たすとき, Filling T の i

行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たすという:

$$\begin{aligned} a &\leq A < b, \\ b &\leq A < a, \end{aligned}$$

ただし $T_{i+1,1} = a$, $T_{i+1,2} = b$, and $T_{i,1} = A$ とする.

Remark 5.2 T と T' が $T_{i+1,1} = T'_{i+1,2}$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,1}$, $T_{i,1} = T'_{i,1}$ を満たすとする. このとき, T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たすことと, T' の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たすことは同値.

Definition 5.3 (condition $xXxX$) 次の不等式のいずれかを満たすとき, Filling T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition $xXxX$ を満たすという:

$$\begin{aligned} a &\leq A < b \leq B, \\ b &\leq A < a \leq B, \\ a &\leq B < b \leq A, \\ b &\leq B < a \leq A, \\ A &< b \leq B < a, \\ A &< a \leq B < b, \\ B &< b \leq A < a, \\ B &< a \leq A < b, \end{aligned}$$

ただし $T_{i+1,1} = a$, $T_{i+1,2} = b$, $T_{i,1} = A$, $T_{i,2} = B$.

Remark 5.4 T と T' は $T_{i+1,1} = T'_{i+1,2}$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,1}$, $T_{i,1} = T'_{i,1}$, $T_{i,2} = T'_{i,2}$ をみたすとする. このとき, T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition $xXxX$ を満たすことと, T' の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition $xXxX$ を満たすことは同値.

Definition 5.5 $\mu = \nu \amalg (2^l)$ 上の filling T に対し, $\tau(T)$ を次の手続きによって得られる filling T' として定義する:

入力 Filling T , 整数 $k = l(\nu)$.

変数 i, T' .

手続き

1. 変数 i と T' を初期化する.
 - (a) $i \leftarrow k$.
 - (b) $T' \leftarrow T$.

2. If T' の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たす do
 - (a) T' の $(i+1)$ 行目の値を入れ換える.
 - (b) $i \leftarrow i+1$.
 else T' を出力し終了.
3. While の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition $xXxX$ を満たす do
 - (a) T' の $(i+1)$ 行目の値を入れ換える.
 - (b) $i \leftarrow i+1$.
4. T' を出力し終了.

出力 Filling T' .

Example 5.6 $l=5, \nu=(3,3)$ としたとき, $\tau(T)$ を決めるアルゴリズムの各ステップでは次のようになる:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 6 & 2 & \\ \hline 3 & 1 & \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} = \tau(T).$$

Remark 5.7 Remark 5.2 と Remark 5.4 により, τ が involution すなわち $\tau(\tau(T)) = T$ がわかる. また, τ は T の weight をかえることはないので $\tau: \mathcal{F}_\mu(w) \ni T \mapsto \tau(T) \in \mathcal{F}_\mu(w)$ が全単射であることがわかる.

このように定義された τ に対し次の定理が成り立つ.

Theorem 5.8 For $\mu = (\nu_1, \dots, \nu_k, 2^l) = \nu \amalg (2^l)$ such that $\nu_k \geq 2$, let $\pi: \nu \amalg (2^l) \rightarrow \mu$, $\pi^*: \mathcal{F}_\mu \rightarrow \mathcal{F}_\nu \times \mathcal{F}_{(n^l)}$ be as above, and τ a bijection defined in Definition 5.5. Then $\varphi = (\pi^* \circ \tau)^{-1}$ satisfies the condition of Theorem 2.7.

Example 5.9 Example 5.6 で用いた例に対し, maj は次のようになっている:

$$\begin{aligned} \text{maj}(T) &= \text{maj} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \right) = 13, \\ \text{maj}(\pi^* \circ \tau(T)) &= \text{maj} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \right) + \text{maj} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 6 & 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array} \right) = 0 + 8 = 8 \\ &\equiv 13 \pmod{5}. \end{aligned}$$

また inv については次のようになっている:

$$\begin{aligned} \text{inv}(T) &= \text{inv} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \right) = 0 + 5 - 2 = 3, \\ \text{inv}(\pi^* \circ \tau(T)) &= \text{inv} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline \end{array} \right) + \text{inv} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 6 & 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline \end{array} \right) = 3 + 1 - 1 = 3. \end{aligned}$$

6 Theorem 5.8 の証明について

以下では Theorem 5.8 の証明の概略を述べる.

(2), (4) より, inv の差は, $\text{inv}''_{k+1}(T) - \text{arm}_{k+1}(T)$ であったので, まず, inv''_{k+1} と arm_{k+1} に着目する.

Lemma 6.1 T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たさないなら

$$\text{inv}''_{i+1}(T) - \text{arm}_{k+1}(T) = 0.$$

この Lemma より, T の k 行目と $(k+1)$ 行目が condition xAx を満たさないなら $\text{inv}(T)$ は π^* で保存されることがわかる. 一方, T の k 行目と $(k+1)$ 行目が condition xAx を満たすときには次が成立する.

Lemma 6.2 T と T' が $T_{i+1,1} = T'_{i+1,2}$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,1}$, $T_{i,1} = T'_{i,1}$ を満たすとする。 T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition xAx を満たすとき、次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{inv}'_{i+1}(T) &= \text{inv}'_i(T') + \text{inv}''_{i+1}(T') - \text{arm}_{i+1}(T') \\ \text{inv}'_{i+1}(T') &= \text{inv}'_i(T) + \text{inv}''_{i+1}(T) - \text{arm}_{i+1}(T). \end{aligned}$$

この Lemma より, π^* によって k 行目と $k+1$ 行目が切り離される際に生まれる inv の差 $\text{inv}''_{k+1}(T) - \text{arm}_{k+1}(T)$ を τ が帳消しにしていることがわかる。しかしながら τ により, $k+1$ 行目に入っている値が入れ換えられてしまうため, $k+1$ 行目に起因する inv と maj が変わる可能性がある。しかしながら, 次の Lemma があるため, $k+1$ 行目と $k+2$ 行目が condition $xXxX$ を満たすときには, さらに $k+2$ 行目の値を入れ換えることで, $k+1$ 行目に起因する inv と maj を調整することができる。

Lemma 6.3 T と T' が $T_{i+1,1} = T'_{i+1,2}$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,1}$, $T_{i,1} = T'_{i,2}$, $T_{i,2} = T'_{i,1}$ を満たすとする。 T の i 行目と $(i+1)$ 行目は condition $xXxX$ を満たすとする, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{maj}_{i+1}(T) &= \text{maj}_{i+1}(T') \\ \text{inv}'_i(T) + \text{inv}''_{i+1}(T) - \text{arm}_{i+1}(T) &= \text{inv}'_i(T') + \text{inv}''_{i+1}(T') - \text{arm}_{i+1}(T'). \end{aligned}$$

一方, T の i 行目と $(i+1)$ 行目が condition $xXxX$ を満たさない場合は次の 2 つの Lemma のいずれかが当てはまり, $k+1$ 行目に起因する inv と maj は, $k+1$ 行目を交換したことで変化していないことがわかる。

Lemma 6.4 T と T' は $T_{i+1,1} = T'_{i+1,1} = a$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,2} = b$, $T_{i,1} = T'_{i,2} = A$, $T_{i,2} = T'_{i,1} = B$ をみたすとし, 次のうちのどちらかが成り立つとする:

$$\begin{aligned} A &< a, b \leq B, \\ B &< a, b \leq A. \end{aligned}$$

(ただし $A < a, b \leq B$ は $A < a \leq B$ かつ $A < b \leq B$ を表すとする。) このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{maj}_{i+1}(T) &= \text{maj}_{i+1}(T'), \\ \text{inv}'_i(T) + \text{inv}''_{i+1}(T) - \text{arm}_{i+1}(T) &= \text{inv}'_i(T') + \text{inv}''_{i+1}(T') - \text{arm}_{i+1}(T'). \end{aligned}$$

Lemma 6.5 T と T' は $T_{i+1,1} = T'_{i+1,1} = a$, $T_{i+1,2} = T'_{i+1,2} = b$, $T_{i,1} = T'_{i,2} = A$, $T_{i,2} = T'_{i,2} = B$ を満たし, 次の不等式のうちのいずれかが成り立つとする:

$$\begin{aligned} a, b &\leq A, B, \\ A, B &< a, b, \\ a &\leq A, B < b, \\ b &\leq A, B < a. \end{aligned}$$

このとき次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{Des}_{i+1}(T) &= \text{Des}_{i+1}(T'), \\ \text{Inv}''_{i+1}(T) &= \text{Inv}''_{i+1}(T'), \\ \text{Inv}'_{i+1}(T) &= \text{Inv}'_{i+1}(T'). \end{aligned}$$

以上から, condition $xXxX$ を満たさなくなるまで, 次々と交換を繰り返すことで, いま必要な filling が得られることがわかる. したがって, Definition 5.5 により定義された τ を用い, $\varphi = (\pi^* \circ \tau)^{-1}$ とおくと, Theorem 2.7 の条件を満たすこと, すなわち Theorem 5.8 がわかる.

参考文献

- [1] F. Descouens and H. Morita, *Factorization formula for Macdonald polynomials*, to appear in European Journal of Combinatorics.
- [2] F. Descouens, H. Morita, Y. Numata, *On a bijective proof of a factorization formula for Macdonald polynomials*, preprint.
- [3] J. Haglund, M. Haiman and N. Loehr, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, J. Amer. Math. Soc. **18**, (2005), pp. 195-232.
- [4] I.G. Macdonald, *A new class of symmetric functions*, Actes du 20e Séminaire Lotharingien de Combinatoire, vol. **372/S-20**, Publications I.R.M.A., Strasbourg, (1998), pp. 131-171.
- [5] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed. The Clarendon Press, Oxford University Press, New-York, 1995.